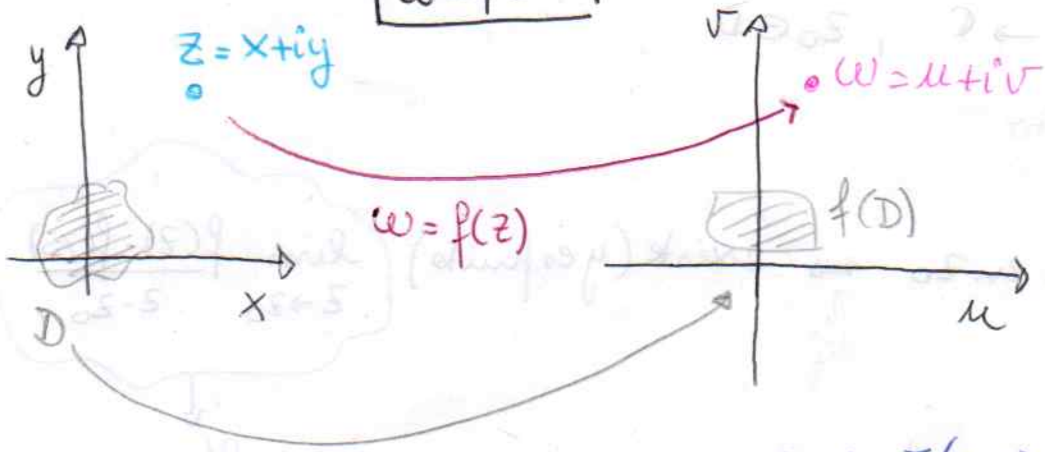
VISUALIZACIÓN DE F. COMPLEJAS

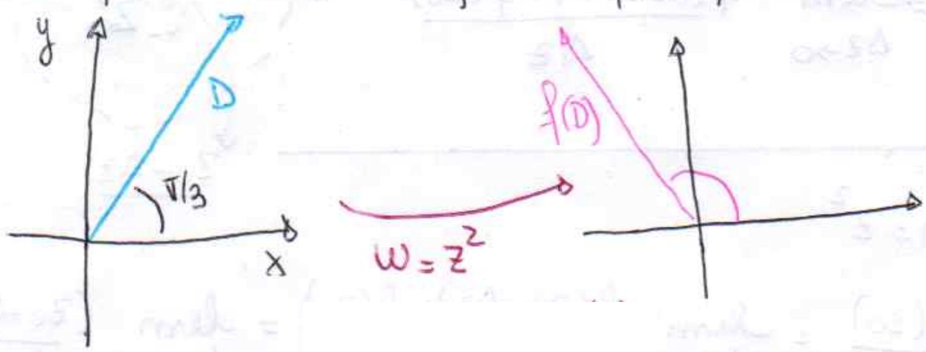
$$\boxed{w = f(z)}$$



$$(u,v) = T(x,y)$$
$$T: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

Ej: $f(z) = z^2$

$D = \{ z \in \mathbb{C} : \arg z = \pi/3 \}$ $\qquad f(D) = \{ w \in \mathbb{C} : \arg(w) = \pi \cdot \frac{2}{3} \}$



$$\boxed{y = \sqrt{3}x} \longrightarrow \begin{array}{l} u = x^2 - y^2 = x^2 - 3x^2 = -2x^2 \leq 0 \\ v = 2xy = 2x\sqrt{3}x = 2x^2\sqrt{3} \geq 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = -\sqrt{3}\,u}$$

Derivadas

$f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$
abierto

f derivable en z_0 $\Leftrightarrow$ existe (y es finito) $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$
def

$f'(z_0)$

También: $\Delta z = z - z_0$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Ejemplo: $f(z) = z^2$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z_0^2 + 2z_0 \Delta z + \Delta z^2 - z_0^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} 2z_0 + \Delta z = 2z_0$$

$f'(z_0) = 2z_0$ para todo $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\boxed{(z^2)' = 2z}$$

Ejemplo $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 + 0i$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)(\overline{z_0 + \Delta z}) - z_0 \bar{z}_0}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z_0 \bar{z}_0 + \Delta z . \bar{z}_0 + \overline{\Delta z} . z_0 + \Delta z . \overline{\Delta z} - z_0 \bar{z}_0}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \bar{z}_0 + \overline{\Delta z} + z_0 \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \overline{z_0} + \overline{\Delta z} + z_0 \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = ?$$

$$- \text{si } \Delta z = \Delta x \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \overline{z_0} + \Delta x + z_0 \frac{\Delta x}{\Delta x} = \overline{z_0} + z_0$$

$$- \text{si } \Delta z = i\Delta y \qquad \lim_{\Delta y \to 0} \overline{z_0} + \overline{i\Delta y} + z_0 \frac{\overline{i\Delta y}}{i\Delta y} = \overline{z_0} - z_0$$

$\neq$ si $z_0 \neq 0$ $\Rightarrow \boxed{\nexists f'(z_0) \text{ si } z_0 \neq 0}$

$$- \text{si } z_0 = 0 \qquad \lim_{\Delta z \to 0} 0 + \overline{\Delta z} + 0 . \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = 0 \Longrightarrow \boxed{f'(0) = 0}$$

Observe: $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 + i0$

$\hookrightarrow u(x,y),\ v(x,y)$: C^{∞} en $\mathbb{R}^2$

Ejemplo $f(z) = \frac{1}{z}$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\frac{1}{z+\Delta z} - \frac{1}{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} \frac{z - (z+\Delta z)}{(z+\Delta z) . z} =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-\Delta z}{\Delta z . (z+\Delta z) . z} = -\frac{1}{z^2} \quad (z \neq 0)$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}} \quad (z \neq 0)$$

Propiedades

- Derivabilidad $\Rightarrow$ continuidad.

- Reglas de derivación:

$$(f+g)' = f' + g' \qquad (f \cdot g)' = f'g + f \cdot g' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f g'}{g^2}$$

$$(f \circ g)' = f' \cdot g'$$

* Regla de la cadena

- Derivadas comunes:

$c' = 0 \quad$ (c: constante)

$z' = 1$

$z^2 = 2z$

Ejemplos

① $z^3 = z \cdot z^2 \Rightarrow (z^3)' = z' \cdot z^2 + z \cdot (z^2)' = z^2 + z \cdot 2z = 3z^2$

② $z^n = n z^{n-1} \qquad n \in \mathbb{N}$

③ $z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n \quad n \in \mathbb{N}$. Derivando: $(z^{-n})' = \left[\left(\frac{1}{z}\right)^n\right]' = n \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^{n-1} \cdot \frac{(-1)}{z^2}$

$(z \neq 0)$

$$= n \frac{1}{z^{n-1}} \cdot \frac{(-1)}{z^2} = \frac{-n}{z^{n+1}} = \boxed{-n z^{-n-1}}$$

$$(z^{-n})' = -n z^{-n-1}$$

④ $$\left(\frac{z^2 + 2iz}{z-1}\right)' = \frac{(2z+2i)(z-1) - (z^2+2iz) \cdot 1}{(z-1)^2}$$

⑤ $f(z) = 3x \cos y + i 4y \cdot x^2 \qquad f'(z)$?!

TEOREMÓN

Sea $f: D \to \mathbb{C}$, D abierto en $\mathbb{C}$

$f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$

$z_0 = x_0 + i y_0 \in D$

f es derivable en z_0 $\iff$ $\begin{cases} a) & u \text{ y } v \text{ son diferenciables en } (x_0,y_0) \\ b) & u'_x(x_0,y_0) = v'_y(x_0,y_0) \\ & u'_y(x_0,y_0) = -v'_x(x_0,y_0) \end{cases}$

En ese caso: $f'(z_0) = u'_x(x_0,y_0) + i v'_x(x_0,y_0)$

$= v'_y(x_0,y_0) - i u'_y(x_0,y_0)$

$= v'_y(x_0,y_0) + i v'_x(x_0,y_0)$

$= u'_x(x_0,y_0) - i u'_y(x_0,y_0)$

b) $\boxed{\begin{matrix} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{matrix}}$ $\longrightarrow$ ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN

Ejemplo: $f(z) = |z|$ $\Rightarrow$ $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $v(x,y) = 0$

- u y v son diferenciables? $\to$ sí, en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$
- EC. DE C.R: $u'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = v'_y = 0 \iff x = 0$ (y $y \neq 0$)

  $u'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -v'_x = 0 \iff y = 0$ (y $x \neq 0$)

Luego: f no es derivable en ningún z.

Ejemplo $f(z)=\bar{z} \Rightarrow u(x,y)=x$
$v(x,y)=-y$

. u y v diferenciables? $\rightarrow$ sí, en todo $\mathbb{R}^2$

. EC DE C.R? $u'_x(x,y)=1 \qquad v'_y(x,y)=-1$

$u'_y(x,y)=0 \qquad v'_x(x,y)=0$

No se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann

Luego: $f(z)$ no es derivable en ningún z

Ejemplo: $f(z)=\underbrace{3y^2x-x^3}_{u(x,y)}+i\underbrace{(-3yx^2+y^3)}_{v(x,y)}$

. u y v dif en $\mathbb{R}^2$

. Ec. de C.R: $u'_x(x,y)=3y^2-3x^2 \qquad v'_y(x,y)=-3x^2+3y^2$

$u'_y(x,y)=6yx \qquad v'_x(x,y)=-6yx$

se verifica C-R en todo $\mathbb{R}^2$

Luego: f es derivable en $\mathbb{C}$ y

$$f'(z)=u'_x(x,y)+i\,v'_x(x,y)=3y^2-3x^2+i(-6yx)$$
$$=-3(x^2-y^2+i\,2xy)$$
$$=-3z^2$$

Nota: observe que $f(z)=-z^3$

HOLOMORFÍA

f es **Holomorfa** en z_0 si es derivable en algún disco centrado en z_0

disco centrado en z_0, radio δ.
$D(z_0, \delta)$

Ejemplos: $\cdot\ f(z) = |z|^2$

$\downarrow$

derivable sólo en $z=0$ $\Rightarrow$ NO ES HOLOMORFA en ningún pto

$\cdot\ f(z) = z^3 \rightarrow$ derivable en todo $z \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ holomorfa en todo $z \in \mathbb{C}$

$\cdot\ f(z) = \frac{1}{z} \rightarrow$ derivable en todo $z \neq 0$ $\Rightarrow$ holomorfa en todo $z \neq 0$

$\cdot\ f(z) = x^2 - iy^2$

$$\left.\begin{array}{l} u(x,y) = x^2 \\ v(x,y) = -y^2 \end{array}\right\} \text{dif en } \mathbb{C}.$$

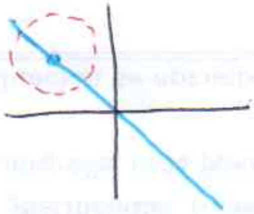
$$\text{C-R.} \left\{\begin{array}{l} u'_x(x,y) = 2x = v'_y(x,y) = -2y \\ u'_y(x,y) = 0 = -v'_x(x,y) = 0 \end{array}\right. \iff x = -y$$

f derivable en $z = x - ix$, $x \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow$ NO ES HOLOMORFA en ningún punto

$f'(z) = 2x + 0i$

$\downarrow$

$x - ix$



f es Holomorfa en un abierto D si es holomorfa en todo $z \in D$.

Def: f es ENTERA si es holomorfa en $\mathbb{C}$.

Consecuencias de holomorfía

Si $f(z) = u(x,y) + i\,u(x,y)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ $\Rightarrow f(z) = c$ constante

(prob 20.a) $\mathrm{Re} f = \mathrm{Im} f$

Dem: $v(x,y) = u(x,y)$ $\Rightarrow$ ambos dif. (por ser f holomorfa)

u, v verifican C-R: $\begin{cases} u'_x(x,y) = v'_y(x,y) = u'_y(x,y) \\ u'_y(x,y) = -v'_x(x,y) = -u'_x(x,y) \end{cases}$ para todo (x,y)

$\Longleftrightarrow \begin{cases} u'_x(x,y) = -u'_x(x,y) \\ u'_y(x,y) = -u'_y(x,y) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u'_x(x,y) = 0 \\ u'_y(x,y) = 0 \end{cases}$ para todo (x,y)

$\Longleftrightarrow$ $u(x,y)$ es constante

$\Longrightarrow$ $v(x,y)$ es constante

$\Longrightarrow$ $f(z)$ es constante

Si $f(z)$ y $\bar{f}(z)$ son holomorfas en un dominio D (D abierto y conexo) recinto

$\Rightarrow f$ es constante en D. (prob. 22 a)

Dem: $\left.\begin{array}{l} f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) \\ \bar{f}(z) = \tilde{U}(x,y) + i\,\tilde{V}(x,y) = u(x,y) - i\,v(x,y) \end{array}\right\}$ holomorfas en D

* $u, v, \tilde{U}, \tilde{V}$ son dif. en D

* C-R: $\left.\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \\ \tilde{U}'_x = \tilde{V}'_y \\ \tilde{U}'_y = -\tilde{V}'_x \end{cases} \right\}$ $\left.\begin{array}{l} \tilde{U}'_x = \tilde{V}'_y \\ \tilde{U}'_y = -\tilde{V}'_x \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} u'_x = -v'_y \\ u'_y = v'_x \end{array}$ $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} u'_x = v'_y = 0 \\ u'_y = v'_x = 0 \\ \text{en } D \end{array}$ $\Rightarrow$ u y v constantes en D

$\Rightarrow f$ constante en D